Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire 2013-2014
Semestre 4

Contrôle de Probabilité

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies. ***Aucun résultat non justifié ne sera accepté.***

Bon courage

Exercice. On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant des boules blanches et noires indiscernables telles que:

- U_1 contient 5 boules blanches et 3 noires,
- U_2 contient 2 boules blanches et 3 noires,
- U_3 contient 3 boules blanches et 1 noires,

On dispose aussi d'un sac contenant 10 jetons, dont chaque jeton porte un seul numéro: 1,2 ou 3 tels que:

5 jetons portent le numéro 1 et 3 jetons portent le numéro 2.

On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante:

$$(\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} \text{On tire au hasard et avec remise un jeton du sac et on note son numéro.} \\ \text{Si le numéro tiré est } i,\ (i \in \{1,2,3\}),\ \text{on effectue alors un tirage avec remise} \\ \text{dans l'urne portant le numéro } i:\ \text{c.à.d l'urne } U_i. \end{array} \right.$$

?

On considère l'événement: $A =$ "La boule tirée est blanche" et on associe à l' épreuve $(\mathcal{E})$ la variable aléatoire X telle que

$$(\ast):\quad X \text{ vaut } +3 \text{ points si } A \text{ se réalise et } -2 \text{ points sinon.}$$

1. Calculer $p(A)$.
2. On tire une boule, comme dans $(\mathcal{E})$, et on s'aperçoit qu'elle est noire. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2. → Formule de Bayes
3. Donnez la loi de X ainsi que son espérance mathématique.
4. On répète l'épreuve $(\mathcal{E})$ trois fois successives et on définit la variable aléatoire Y par

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

   où chaque variable X_j, $j = 1, 2, 3$ est associée à la $j^{\text{ème}}$ itération de $(\mathcal{E})$ et définie comme dans $(\ast)$ plus haut.
   (a) Donner la loi de Y sous forme d'une table.
   (b) Tracer la fonction de répartition F de Y.
   (c) i. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $p(Y < x) = 0.7$?
   ii. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $p(Y < x) < 0.2$?
5. On répète maintenant l'épreuve $(\mathcal{E})$ jusqu'à la réalisation de A et on définit la variable aléatoire Z qui prend comme valeurs le nombre de répétitions effectuées jusqu'à la réalisation de A pour la première fois.

   Donner la loi de Z, son espérance mathématique ainsi que sa variance.

Ibn Tofail

Année universitaire 2013-2014

Semestre 4

Ecole Nationale des Sciences Appliquées

Kénitra

Examen de Probabilité

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies. **Aucun résultat non justifié ne sera accepté.** *Tout échange de matériel, de quelconque nature que ce soit, est interdit.*

Bon courage

Questions de cours: (3 points) Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance m et de variance $\sigma > 0$.

1. Tracer sommairement le graphe de la densité de probabilité de X.
2. Que représente $P(X \leq a)$ sur ce graphe?
3. Sur le graphe tracé précédemment, indiquer une zone d'aire d'environ 93%.

Exercice: Une usine dispose d'une machine pour détecter une certaine défectuosité d'un équipement électronique. Les résultats sont comme suit:

- **Si l'équipement possède le défaut:** la machine détecte le défaut dans 90% des cas et dans 10% des cas elle échoue.
- **Si l'équipement ne possède pas le défaut:** la machine l'indique correctement dans 99% des cas et elle échoue dans 1% des cas.

1. Dans une large population d'équipements où l'on sait que 0.1% des équipements possèdent le défaut, quelle est la probabilité qu'un équipement tiré au hasard soit détecté défectueux par la machine.

   <u>NB:</u> Si vous ne parvenez pas à calculer cette valeur, vous pouvez l'appeler α et travailler avec α dans la suite.

2. On procède à des tirages avec remise n fois successives, $n \geq 30$. Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre total d'équipements que la machine considère défectueux durant ces n tirages.
   (a) Donner l'espérance mathématique ainsi que la variance de X_n en fonction de n.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, calculer $\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq k)$.
   (c) Donner un entier N_0 et deux réels m et ε, avec $\varepsilon > 0$, vérifiants:
   $$P(m - \varepsilon \leq X_{N_0} \leq m + \varepsilon) \geq 90\%$$
3. Calculer la valeur de $P(49 \leq X_{1000} \leq 51)$.
   (On ne demande pas de correction de continuité.)
4. Trouvez le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ vérifiant:
   $$P(X_{1000} \geq k) \leq 75\%$$

Tournez la page SVP

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire 2013-2014
Semestre 4

Examen de rattrapage de Probabilité

(Durée 1H)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies. **Aucun résultat non justifié ne sera accepté.** *Tout échange de matériel, de quelconque nature que ce soit, est interdit.*

Bon courage

Exercice 1 **(6 points)** Un composant électrique fabriqué selon un procédé a une durée de vie, qui exprimée en heures est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(160, 30^2)$.

1. Calculer:

$$p_1 = P(X \leq 140), \quad p_2 = P(X \geq 200), \quad p_3 = P(130 \leq X \leq 190), \quad p_4 = P(X \geq 200 | X > 140)$$

2. Trouvez deux réels $a \geq 0$ et b vérifiant:

$$P(-a \leq X \leq a) = 0.9, \quad P(X \geq b) = 0.8$$

Exercice 2 **(14 points)** Une usine dispose d'une machine qui doit être utilisée 100 fois. Durant chaque utilisation la machine peut tomber en panne avec une probabilité de 0.01.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que la machine tombe en panne durant ces 100 utilisations.

1. Donner la loi de X, son espérance ainsi que sa variance.
2. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \leq 2)$.
3. Calculer $P(X \geq 50)$.
4. On estime que la réparation de la machine revient à 500 DH pour chaque panne. Soit Y la variable aléatoire qui calcule la dépense pour les réparations après 100 utilisations.
   (a) Donnez la loi de Y, $E(Y)$ et $V(Y)$.
   (b) Calculer $P(Y \geq 5000)$.

500^2